経営論集
Vol.3, No.2, March 2017, pp.1-6
ISSN 2189-2490

■ 論文 ■

集約関数の特徴づけ

山本芳嗣
周　游

概要

本稿では Balinski と Laraki [2] によっ提案された Majority Judgment で中心的な役割を演じる集約関数の問題点を指摘し、それが強単調性の条件を緩めることによって解消できることを示す。さらに評価者の評価が大きく割れた場合の社会的評価が集約関数を一意的に決定することを示す。

キーワード：匿名性、弱単調性、強単調性、戦略的操作耐性、Majority Judgment、集約関数

（受理日　2016年7月13日）

文教大学経営学部
〒253-8550 神奈川県茅ヶ崎市行谷1100
Tel 0467-53-2111(代表)　Fax 0467-54-3734
http://www.bunkyo.ac.jp/faculty/business/

経営論集　Vol.3, No.2(2017) pp.1-6

集約関数の特徴づけ

山　本　芳　嗣 *
周　　　　游 **

1．はじめに

本稿では複数の評価者によって選択肢に対して表明された評価をどのように社会的評価に集約するかという問題を考える。$N = \{1, 2, ..., n\}$ で評価者の集合を、$L = \{1, 2, ..., l\}$ で選択肢の集合を表す。さらに m 個の評価語からなる評価語彙を$\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$で示すことにする。評価者はこの評価語彙$\Lambda$から1つの評価語を選んで表明する。評価語彙$\Lambda$には順序$\preceq$が定義されており、$\lambda_1 \prec \lambda_2 \prec \cdots \prec \lambda_m$と番号付けられているとする。記号の簡略化のため以降では評価語彙Λの最小要素（最低評価）λ_1と最大要素（最高評価）λ_mをそれぞれ α と ω と表記することにする。まず Balinski と Laraki［1, 2］によって提案された Majority Judgment で中心的な役割を演じている集約関数を定義する。

定義1.1. n 人の評価者が表明した評価 $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Lambda^N$に対して社会的評価 $f(x) \in \Lambda$を与える関数 f を**集約関数**と呼ぶ。

各評価者が各選択肢に対して表明した評価をまとめてできる評価語からなる $l \times n$ 行列を**プロファイル**と呼ぶ。各プロファイルに対して評価語からなる l 次元ベクトルを与える関数は**社会的評価関数**と呼ばれるが、これに中立性と無関係対象からの独立性を仮定すれば、選択肢 i の評価はプロファイルの i 行だけから決まることが直ちに導かれる（［2］の Chapter 9 参照）。よって以降で注目すべきは定義1.1 で定義された集約関数である。

本稿ではまず集約関数に対して Balinski と Laraki が想定した条件を説明し、次いで２節と３節でその問題点を述べる。幾つかの補題を４節で示したのち、集約関数の一意性を５節で示す。６節では Balinski と Laraki の順位関数との関係を述べる。Majority Judgment については Balinski と Laraki［2］や、［7］の「Majority Judgment のページ」を、割愛した補題や定理の証明は［6］を参照していただきたい[1)]。

2．基本的条件

集約関数に想定すべき条件の中で以下の２条件は最も基本的なものである。

定義2.1. 集約関数 f は、任意の $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \Lambda^N$ と N 上の任意の置換 τ に対して $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, ..., x_{\tau(n)})$ を満たすとき**匿名性**（*anonymity*）を持つという。

定義2.2. すべての $i \in N$ について $x_i \preceq x'_i$ であるとき

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \preceq f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$$

* 筑波大学名誉教授
✉ yamamoto@sk.tsukuba.ac.jp
** キヤノン IT ソリューションズ株式会社

を満たすとき集約関数 f は**弱単調性**を持つ（*weakly monotone*）という。

匿名性は評価者の名前が結果に影響しないこと、弱単調性は評価者のより良い評価は選択肢の社会的評価を下げないことを意味している。以降ではこの２条件を仮定する。

３．Balinski と Laraki の想定した条件

Balinski と Laraki は[2]で、さらに3つの条件を想定している。その２つは以下の強単調性と全員一致性である。

定義3.1． すべての$i \in N$について$x_i \prec x'_i$であるとき

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \prec f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$

を満たすとき集約関数 f は**強単調性**を持つ（*strongly monotone*）という。

定義3.2． 任意の$x \in \Lambda$について

$f(x, x, \ldots, x) = x$

のとき集約関数 f は**全員一致性**を持つ（*unanimous*）という。

彼らの３番目の条件を紹介するために操作可能性について説明しよう。そのため $x = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \Lambda^N$ と $x' \in \Lambda$ に対して

$\boldsymbol{x}/_i x' = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x', x_{i+1}, \ldots, x_n)$

と記号を約束する。すなわち$\boldsymbol{x}/_i x'$は評価者 i が評価をx'に変更し，他の評価者はその評価を維持した評価ベクトルである。

定義3.3． 集約関数 f は以下の条件を成り立たせる$x' \in \Lambda$が存在するとき、評価者$i \in N$によって$\boldsymbol{x} \in \Lambda^N$で**操作可能**（*manipulable*）であるという。

$$f(x)\left\{\begin{matrix} \prec \\ \succ \end{matrix}\right\} x_i \text{ なら } f(x)\left\{\begin{matrix} \prec \\ \succ \end{matrix}\right\} f(\boldsymbol{x}/_i x') \qquad (3.1)$$

上記の(3.1)は、社会的評価$f(\boldsymbol{x})$が評価者 i の評価x_iよりも悪い（良い）場合には、評価者 i はその評価を偽ることによって社会的評価を引き上げる（下げる）ことができることを意味している。このような操作が可能であると、評価を偽って表明する動機を与えることになるため、評価方法の信頼性を損なうこととなる。Balinski と Laraki が想定した最後の条件は集約関数がこのような操作に対して耐性を持つことである。

定義3.4． 集約関数が**戦略的操作耐性**を持つ（*strategy-proof*）とは、どのような評価$\boldsymbol{x} \in \Lambda^N$においてもどの評価者によっても操作可能でないことをいう。

以上の条件を満たす集約関数はどのように与えられるかという問いは当然の問いであるが、Balinski と Laraki はそのような集約関数は次に定義される順位関数のみであることを示している。

定義3.5． $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$に対して **$k$-順位関数**（*kth order function*）とは評価者の表明した n 個の評価の中で下位から k 番目の評価を返す関数である。

つまり、k-順位関数は表明された評価を$x_{i_1} \preceq x_{i_2} \preceq \ldots \preceq x_{i_n}$と昇順に並べ替え、その k 番目の評価x_{i_k}を出力する[2)]．次の定理は彼らの主要定理である

定理3.6（[2] の Theorem 10.1）. 任意の $k \in \{1, 2, \dots, n\}$について、k-順位関数は匿名性、弱単調性、強単調性、全員一致性、戦略的操作耐性を持つ集約関数である。また、これらの条件を満たす集約関数は k-順位関数のみである。

以下の議論のために Balinski と Laraki の設定では全員一致性は冗長な条件であることを次の補題に注意しておく。

補題3.7. 強単調性を持つ集約関数は全員一致性を持つ。

以上の議論から検討すべき２つの問題点が挙がってくる。

１番目の問題点は k-順位関数の k の値である。定理3.6が述べるように、k の値にかかわらず k-順位関数は要求された条件を満たす。よって k の値を決定する何らかの説得力ある議論が必要である。この問題点に対して Balinski と Laraki は社会的厚生概念を援用して次に定義する**中央順位関数**（*middlemost order function*）を提案している。$x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$とすると中央順位関数は

$$f(\boldsymbol{x})\begin{cases} = x_{\frac{n+1}{2}} & n\text{ が奇数の場合} \\ \in [x_{\frac{n}{2}}, x_{\frac{n}{2}+1}] & n\text{ が偶数の場合} \end{cases}$$

と定義される。ここで

$$[x_{\frac{n}{2}}, x_{\frac{n}{2}+1}] = \{\lambda \in \Lambda \mid x_{\frac{n}{2}} \preceq \lambda \preceq x_{\frac{n}{2}+1}\}$$

である。中央順位関数には n が偶数の場合に社会的評価を一意に定めることができないという欠点がある。

２番目の問題点は、順位関数は評価者によって表明された評価のどれかを社会的評価として常に選ぶ点である。つまりどのように評価者の評価が割れようともいつも$f(x)$は$x_1, x_2, \dots, x_n$のどれかでなければならない。例えば半数の評価が最低評価αで残り半数が最高評価ωであっても、順位関数はαとωのいずれかを社会的評価として与え、決して両者の中間的な評価を返さない。

Moulin [4] の施設配置問題に対する論文がこの問題点の解決への糸口を与えている。彼は直線上の都市に住む単峰な効用関数を持つ住民が公共施設の設置場所を決定する問題を扱い、彼の *generalized majority relation* が幾つかの望ましい条件を満たす唯一の集約関数であることを示している。詳細は Moulin [5] の定義11.6 と定理11.6 を参照していただきたい。Moulin 自身も述べているように、この結果は有限の評価語彙によって評価を表明する我々の問題にすなおに適用可能である。以下では Moulin の議論を参考にして Balinski と Laraki が要請している条件の幾つかを緩和することによって前出の２つの問題点が解決できることを示す。

4. 幾つかの補題

以下の議論で中心的な役割を演じる中位関数を次に定義する。

定義4.1. $\boldsymbol{r}=(r_1, r_2, \dots, r_{2k+1}) \in \Lambda^{2k+1}$の要素の$\Lambda$上の順序$\preceq$による中央値を**中位評価**と呼び、これを与える関数を**中位関数**（*median function*）と呼び、$\mathrm{med}(r_1, r_2, \dots, r_{2k+1})$あるいは$\mathrm{med}(\boldsymbol{r})$と表記する。

この定義から直ちに得られる次の補題は、中位関数の戦略的操作耐性を示す際に基本的な役

割を演じる。

補題4.2. $\boldsymbol{r}=(r_1, r_2, \dots, r_{2k+1})\in\Lambda^{2k+1}$に対して

(1) $\mathrm{med}(\boldsymbol{r})\prec r_i$ かつ $\mathrm{med}(\boldsymbol{r})\preceq r'$ なら

$\mathrm{med}(\boldsymbol{r}/_i r')=\mathrm{med}(\boldsymbol{r})$ である。

(2) $\mathrm{med}(\boldsymbol{r})\succ r_i$ かつ $\mathrm{med}(\boldsymbol{r})\succeq r'$ なら

$\mathrm{med}(\boldsymbol{r}/_i r')=\mathrm{med}(\boldsymbol{r})$ である。

(3) $r'\preceq\mathrm{med}(\boldsymbol{r})\preceq r''$ なら

$\mathrm{med}(r', \boldsymbol{r}, r'')=\mathrm{med}(\boldsymbol{r})$ である。

後に系6.1で明らかになるように定義3.1の強単調性が Balinski と Laraki の設定の問題点の源である。よって我々は匿名性、弱単調性、戦略的操作耐性だけを仮定して議論を進める。次の補題は幾つかの仮想的な評価[3)]を含んだ中位関数が、ここで仮定した全ての条件を満たしていることを示している。

補題4.3. $n+k$が奇数となるkに対して$\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k$を$k$個の評価語とする。このとき関数

$f(x)=\mathrm{med}(x, \gamma)$

は匿名性、弱単調性、戦略的操作耐性を持つ。

まず評価者が1名の場合、つまり$n=1$の場合を考えよう。ここで$\alpha=\lambda_1=\min_{\preceq}\Lambda$, $\omega=\lambda_m=\max_{\preceq}\Lambda$であったことを思い起こしてほしい。

補題4.4. $n=1$とし、$f:\Lambda\to\Lambda$を弱単調な集約関数とする。このときfが戦略的操作耐性を持つための必要十分な条件は

$$f(x)=\mathrm{med}(x, f(\alpha), f(\omega)) \tag{4.1}$$

と書けることである。

5. 集約関数の一意性

5.1. 主定理. 匿名性、弱単調性、戦略的操作耐性を持つ集約関数fは$n+1$個の仮想評価$\gamma_0, \gamma_1 \dots, \gamma_n\in\Lambda$によって

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$=\mathrm{med}(x_1, x_2, \dots, x_n, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$

と書けるとの主定理を示そう。証明は評価者の人数$|N|=n$に関する帰納法で行う。すでに補題4.4 で$|N|=n=1$の場合には$\gamma_0=f(\alpha)$と$\gamma_1=f(\omega)$で成立することを見た。ここでλ^kを$n-k$個のαとk個のωからなるベクトルとする。つまり

$$\lambda^k=(\underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_{n-k}, \underbrace{\omega, \dots, \omega}_{k})\in\Lambda^N \tag{5.1}$$

である。このとき以下の定理が成り立つ。

定理5.1. $f:\Lambda^N\to\Lambda$を匿名性、弱単調性、戦略的操作耐性を持つ集約関数とする。

$\gamma=(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$を

$$\gamma_k=f(\lambda^k) \tag{5.2}$$

と定義すると、任意の$x\in\Lambda^N$で

$$f(x)=\mathrm{med}(x, \gamma) \tag{5.3}$$

が成り立つ。

この定理をまとめると次の系が得られる。

系5.2. 集約関数$f:\Lambda^N\to\Lambda$が匿名性、弱単調性、戦略的操作耐性を持つための必要十分な条件は、$\gamma=(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n)\in\Lambda^{n+1}$が存在して

$f(x)=\mathrm{med}(x, \gamma)$

と書けることである。

5.2. 仮想評価の縮小. 集約関数に付加的な条件を仮定すれば仮想評価$\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$の個数を

減らすことが可能である。

定義5.3. 集約関数fは

$f(\alpha, \alpha, \dots, \alpha)=\alpha$かつ$f(\omega, \omega, \dots, \omega)=\omega$

を満たすとき**両端で全員一致性**を持つ（*unanimous at ends*）という。

系5.4. 匿名性、弱単調性、戦略的操作耐性を持つ集約関数$f: \Lambda^N \to \Lambda$が全員一致性を持つための必要十分条件は両端で全員一致性を持つことである。

系5.5. 匿名性、弱単調性、戦略的操作耐性を持つ集約関数$f: \Lambda^N \to \Lambda$が両端で全員一致性を持つかあるいは強単調であるとする。このとき$n-1$個の仮想評価$\gamma=(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1})\in\Lambda^{n-1}$が存在して

$f(x)=\mathrm{med}(x, \gamma)$

と書ける。

6．順位関数の導出

これまで集約関数は$n+1$個の仮想評価$\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$によって完全に決定づけられることを見てきた。しかもこれらの仮想評価は最低評価αと最高評価ωのみが表明された場合の集約関数の出力する社会的評価であった。λ^kの定義(5.1)を再度見ていただきたい。そこで、以下では両端で全員一致性を持ち、しかもλ^kが表明された場合にαあるいはωのいずれかを返す集約関数を考える。弱単調性から

$$\gamma_k=\begin{cases}\alpha & 0\le k\le l \text{ の場合}\\ \omega & l+1\le k\le n \text{ の場合}\end{cases}$$

となるlが存在する。ここで両端での全員一致性から$0\le l\le n-1$であることに注意してほしい。必要な場合には番号を付け直して$x_1 \preceq x_2 \preceq \dots \preceq x_n$とすると、$\gamma_k$が$\alpha$あるいは$\omega$に等しいことから$f(x)$は

$$\begin{aligned} f(x)&=\mathrm{med}(x, \underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_{l+1}, \underbrace{\omega, \dots, \omega}_{n-l})\\ &=\mathrm{med}(\underbrace{\alpha, \dots, \alpha, x_1, \dots, x_{n-l-1}}_{n},\\ &\qquad x_{n-l}, \underbrace{x_{n-l+1}, \dots, x_n, \omega, \dots, \omega}_{n})\\ &=x_{n-l}\end{aligned}$$

で与えられる。以上の結果は、fが Balinski と Laraki の$(n-l)$-順位関数であることを示している。

系6.1（[2] の Theorem 10.1）**.** 匿名性、弱単調性、戦略的操作耐性に加えて強単調性を持つ集約関数$f: \Lambda^N \to \Lambda$は順位関数である。

つまり、強単調性は、表明された評価が大きく割れた場合に集約関数が最低評価か最高評価のいずれかを返すことを導くことになる。

7．結論

本稿では、集約関数が仮想評価と中位関数で特徴づけられること、さらに仮想評価は評価が大きく割れた場合、つまりどの評価者についてもその表明した評価が最低評価かあるいは最高評価である場合、の集約関数の出力であることを示した。これによって、集約関数を決定するには評価が大きく割れた場合についてのみ社会的評価に対して評価者が合意すればよいことが導ける。

注

1） Jennings がその博士論文[3] で本稿の結果と同様の結果をすでに導いていたことを、著者は本稿の元となった論文[6] の査読者からの指摘によって知るに及んだ。これは著者の不勉強による。よって著者は本稿の内容の新規性を主張するつもりはなく、本稿はこの分野に多くの方が興味を持ってくださるようにとの思いから書き記したものである。

2） Balinski と Laraki [2] の Chapter 10 にある順位関数の定義では、評価は降順に並べられており、ここでの定義はその点で彼らのものと異なるが、kを$n-k$で置き換えれば同じものを与える。

3） Moulin は phantom grades と名付けている。

References

[1] Michel Balinski and Rida Laraki, "A theory of measuring, electing and ranking", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **104** (2007) 8720-8725.

[2] Michel Balinski and Rida Laraki, *Majority Judgment : Measuring, Ranking and Electing*, The MIT Press, Cambridge, 2010.

[3] Andrew Jennings, *Monotonicity and Manipulability of Ordinal and Cardinal Social Choice Functions*, Ph.D. Dissertation, Arizona State University, December 2010.

[4] Hervé Moulin, "On strategy-proofness and single peakedness", *Public Choice* **35** (1980) 4, 437-455.

[5] Hervé Moulin, *Axioms of Cooperative Decision Making*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[6] Yoshitsugu Yamamoto and You Zhou, "Characterization of anonymous, weakly monotonic and strategy-proof aggregation function", Discussion Paper 1310, Department of Social Systems and Management, University of Tsukuba, August 2013.

[7] http://infoshako.sk.tsukuba.ac.jp/ ~yamamoto/Majority_Judgment/ 1._Majority_Judgment_heyoukoso.html

Journal of Public and Private Management
Vol.3, No.2, March 2017, pp.1-6
ISSN 2189-2490

Characterization of Aggregation Functions

Yoshitsugu Yamamoto
Professor Emeritus, University of Tsukuba
yamamoto@sk.tsukuba.ac.jp

You Zhou
Canon IT Solutions Inc.

Recieved 13 July 2016

Abstract

This paper is concerned about the aggregation function which plays a central role in the majority judgement that was recently proposed by Balinski and Laraki as a new voting mechanism. We raise two issues about their aggregation function, named order function, and show that they are resolved by relaxing the strong monotonicity condition imposed on the aggregation function, and that the anonymous, weakly monotonic and strategy-proof aggregation function is completely determined by the set of final grades when the judges split deeply.

Keyword : anonymity, weak monotonicity, strong monotonicity, strategy-proofness, majority judgment, aggregation function

Faculty of Business Administration, Bunkyo University
1100 Namegaya, Chigasaki, Kanagawa 253-8550, JAPAN
Tel +81-467-53-2111, Fax +81-467-54-3734
http://www.bunkyo.ac.jp/faculty/business/

経営論集　Vol.3, No.2

ISSN 2189-2490

2017年３月28日発行

発行者　文教大学経営学部　坪井順一

編集　　文教大学経営学部　研究推進委員会

編集長　鈴木誠

〒253-8550 神奈川県茅ヶ崎市行谷1100

TEL：0467-53-2111　FAX：0467-54-3734

http://www.bunkyo.ac.jp/faculty/business/