グラフ理論事始め・道草編 —グラフの定義を巡って—

文教大学大学院情報学研究科 教授　惠 羅　博†

Hiroshi Era†

あらまし　コンピュータ科学基礎分野と扱われることが多いグラフ理論だが，その考察対象であるグラフの定義記述は歴史的な経緯のためか多様性が見られる．同値の概念となることがほとんどでありその違いを問題にすることはないかもしれないが，グラフを捉える観点に注目するのであれば，それらの違いを集めてみるのも一興と考え本文を寄稿した．

キーワード：グラフ理論，数学史

1. は じ め に

歴史的には，雑多な問題の定式化が次第に統合されて「グラフ」という概念に至ったことから，グラフの捉え方や扱い方は研究者のあいだで多様性がみられる．そのためか，グラフの定義の記述には定番がなく著者ごとに些細な違いがあるのが普通である．さらに,「graph」という述語がいつ頃から用いられ始めたのか，著者にとっては今のところ不明でありその定義の多様性とともに気に掛っている．幸いグラフ理論の歴史について学ぶに格好の文献 [1] があり，1800 年代から 1900 年代初期のグラフ理論「的」な研究についての文献が手際よく蒐集されている．著者にはこれを凌駕する資料も調査の時間もないので，ありがたくこの良書と他のいくつかの文献を参照しながら，グラフ黎明期の述語や「graph」の定義についてあれこれ随想してみようと思う．

2. グラフの述語

グラフ理論の分野における最初の論文は有名な「ケーニヒスベルグの橋」の問題を考察した 1736 年のレオンハルト・オイラー [1] のものとされている．これは，水路で互いに隔てられた 4 区域を，それらの間に架かる 7 本の橋すべてを一度だけ通って一巡できるかという問題である．この問題およびその一般化について論じた文献 [1] の中で，オイラーは 4 地域を A, B, C, D, 7 つの橋を a, b, c, d, e, f, g とし，一巡可能かを地域の幾何学的形状の条件ではなく，記号 $A, B, \cdots$ と $a, b, \cdots$ の交互の列の存在条件として整理し特徴づけた．オイラーはこの論文の中で「位置関係だけが問題となる幾何学的問題」の本質を的確に考察して見せたのであるが，そこには,「graph」の述語もなく概念的定義の示唆もない．しかし，地域を有限個の要素の集合 $A, B, \cdots$ とするだけでなく，それらを「結ぶ」という関係をも要素の集合 $a, b, \cdots$ と置いて行った思考過程は，現代のグラフの概念に限りなく近づいたものといってよく，グラフ理論の最初の論文と称される所以である．

点集合とそれらの関係という組合せ論的捉え方からグラフ的考察を行った論文としては，根付き木の数え上げで有名な A. Caley(1857) がある [1]．そこで用いられる述語は，tree, root, branches, knots 等で，現代でも用いられているこれらの述語の起源はこのあたりにあるかと思われる．定義内容も現代と同じである．

同様に木を扱ったものに，C. Jordan(1869) があり，文献 [1] に次の英訳文が引用されている.「Let $x, y, z, u, \cdots$ be any number of points, and $xy, xz, yu, \cdots$ straight lines or curves without self-intersections, such that each one joins just two of these points. We shall call such a system an assemblage of lines $\cdots$」．ここでは，root 等の述語はなく，points, lines, a system of an assemblage of lines の記述があり，幾何学的な観点で捉えていることがわかる．Cayley, Jordan のいずれにも，graph という単語は見えない．

化学の分野で，分子構造式の木を扱った論文に，E. Frankland(1866) がある [1]．ここでは，graphic formulae という言葉で，分子構造式を指している．graphic という言葉はここでは文字通りの形容詞として用いられているだけであるが，その後の graph の述語への指向程度の意味はあったかもしれない．少し後の「化学と代数」というタイトルの J.J.Sylvester(1877)[1] には，graph, valence という述語が登場する．1 つのシステムとして認識し graph の一単語をあてたものとしては，かなり早いものであろう．さらに後年の J.Petersen(1891)[1] には次の記述 (原文英訳) がみられる.「English Authors have given the name graph to

2011 年 12 月 1 日受付

† 〒 253–8550 神奈川県茅ヶ崎市行谷 1100
era@shonan.bunkyo.ac.jp
† Graduate School of Infomation and Communications, Bunkyo University

such a diagram;···」したがって，1800 年代の終わり頃には一部の研究者たちの間では graph という述語が定着していたと思われる．O.Veblen(1922)[1)] は位相幾何学の観点からグラフを考察したもので，1 次元単体複体としてグラフを定義している．そこでの呼称は linear graph であり，論文のタイトルも "Linear Graphs "となっている．この述語はしばらく後まで用いられていたようで，R .G. Busacker, T. L. Saaty(1965)[2)] に「グラフはしばしば線形 (リニヤ) グラフとも呼ばれる」(矢野, 伊理訳,1970, 培風館) という記述がある．しかし，1930 年代以降は，graph の述語が普及したようで，ほとんどの論文が graph を用いている．

3. 定 義 の 比 較

近現代のいくつかの著書から，グラフの定義を引用しその違いをみてみよう．日本語は邦書以外，筆者の訳である．はじめに，マトロイドの生みの親として有名な H.Whiteny の論文 [3)](1931) から．「グラフ (graph)G とは 2 つの記号の有限集合，頂点 (vertex) 集合 $a, b, c, \cdots, f$, 弧 (arc) 集合 $\alpha(ab), \beta(ac), \cdots, \delta(cf)$ からなる．弧 $\alpha(ab)$ がグラフに存在するときその端点 (end vertices)a, b もまた存在する．(中略) このようなグラフ (抽象的グラフ (abstract graph)) の明らかな幾何学的表現 (解釈) を位相幾何学的グラフ (topological graph) と呼ぶ.」Whiteny の定義は，やや直観的で曖昧な表現だが，直ぐにでも厳密な公理化が可能であるような抽象性を内包している．公理主義の時代的な雰囲気と Whitney の個性が合わさったようで興味深い．

次は，グラフ理論書初のベストセラーとして知られる F. Harary の著書 [4)](1969) から.「グラフ (graph)G とは，空でない p 個の点 (points) の有限集合 $V = V(G)$ と，適当に与えられた V の異なる点の非順序対 q 個の集合 X からなるものである．X の点の各非順序対 $x = \{u, v\}$ を G の線 (line) といい，x は u と v を結ぶ (join) という．(中略) 通常，グラフを図で表し，その図を元のグラフそのものとして言及する.」Harary の定義の特徴は，昔の Jordan と同じ point, line という幾何学的述語を用いたことにある．他の多くの著者は point よりも vertex(vertices)，line よりも edge を用いている．多面体がグラフとして表現できるので，歴史的な多面体の研究の経緯から，そこで用いられる vertex, edge が自然に感じられたのであろうか．また，Harary はグラフの図表現をグラフそのものと同一視する便宜的な認識法をことさら奨励しているように見えるのも特徴である．

Harary と同時代の大御所 W.T.Tutte の定義をみてみよう．手元には比較的後年の著書 [5)](1984) しかないが，それを引用させてもらう.「グラフ (graph) とは，頂点 (vertices) と呼ばれる要素の集合 $V(G)$ と辺 (edge) と呼ばれる要素の集合 $E(G)$，および，接続 (incidence) 関係から (なる体系として) 定義されるものである．接続関係とは，各辺に 1 つまたは 2 つの頂点を付随させるもので，それらをその辺の端点 (ends) と呼ぶ.」一見，シンプルな定義に見えるが，実は接続関係という概念に着目しているところが特徴で，深い洞察力で知られる Tutte らしくなかなか一筋縄ではいかない．この定義をさらに明示的に述べた次の文献をみればそのことがよくわかる．日本のグラフ理論の祖というべき師弟，浜田，秋山の共著 [6)](1982) から.「1 つの空でない有限集合を $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ とし，$V(G)$ とはまったく異なった有限集合を $E(G) = \{e_1, e_2, \cdots, e_q\}$ とし，$E(G)$ から $V(G)$ の要素の非順序対 $\{v_i, v_j\}$(2 つの要素が異なることを要しない) の 1 つの族 W の上への写像 Φ_G があるとする．このとき順序組 $G = (V(G), E(G), \Phi_G)$ を一般グラフまたは単にグラフといい，···」．

最後に，グラフ理論書に一時代を画したと言われる現代の名著 R. Diestel[7)](1997) から.「グラフ (graph) とは 2 つの集合の対 $G = (V, E)$ で $E \subseteq [V]^2$ を満たすようなものである．したがって，E の各要素は V の 2-点部分集合である．記法の曖昧さを避けるために，常に $V \cap E = \emptyset$ が成り立つことを暗黙の仮定とする．V の要素を G の頂点 (verteices) (または，節点 (node)，点 (point))，E の要素をその辺 (edge)(または，線 (line)) と呼ぶ.」Tutte 流とは違い，あるのは集合のみである．この定義は，C. Berge が提唱したグラフの集合論的一般化 Hypergraph の概念と整合性があり，極値集合論への指向すら感じとれるというのは考えすぎか．述語もここまでの歴史を踏まえ網羅的にあげていて親切である．Diestel のグラフ理論書のスタンダードを目指す気概が伝わってくる．

4. 終 わ り に

C.Berge, G.C.Rota, O.Ore など現代のグラフ理論の礎を築いた他の碩学たちにも触れたかったが限られた字数では紹介しきれなかった．またの機会を待ちたい．文献も原著を示すべきだが同じ理由で孫引きの体裁となり心苦しい限りである．読者のご寛容を乞う次第である．

〔文　献〕

1）N.L.Biggs et.all, Graph Theory 1736-1936, Clarendon Press, 1976
2）R.G.Busacker, T.L.Saaty, Finite Graphs and Networks, McGraw-Hill, 1965
3）H.Whitney, Non-Separable and Planar Graphs, Trans Amer. Math Soc. 34,1932, 339-362
4）F. Harary, Graph Theory, Addison-Wesley, 1969
5）W.T. Tutte, Graph Theory, Addison-Wesley, 1984
6）浜田隆資, 秋山仁, グラフ論要説, 槇書店, 1982
7）R. Diestel, Graph Theory (3rd ed.), Springer, 2000

恵羅　博（えら　ひろし）1949 年生．1972 年 3 月東京都立大学理学部数学科卒業．1980 年 3 月東海大学大学院理学研究科博士課程単位取得後退学 (数学専攻)．1985 年学位取得 (理学博士, 東海大学)．1986 年 4 月文教大学情報学部講師に着任．現在，文教大学情報学部教授．2005 年 4 月より文教大学大学院情報学研究科教授兼任．情報学研究科では,「情報数学演習」を担当．専門分野はグラフ理論．